هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

.01

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.01 نتحقق أن : $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- لدينا : $u_{n+1}-3=\frac{3+u_n}{5-u_n}-3=\frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n}=\frac{-12+4u_n}{2+(3-u_n)}=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$.

خلاصة : $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نبين بالترجع : $u_n<3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نتحقق أن العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.
لدينا : $u_0=2<3$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.
- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n من $\mathbb{N}$ أي $u_n<3$ (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1}<3$

حسب معطيات الترجع $u_n<3$ ومنه $\left.\begin{matrix}u_n-3<0\\3-u_n>0\end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix}4(u_n-3)<0\\2+(3-u_n)>0\end{matrix}\right\}$

و بالتالي $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$ و منه نستنتج أن $u_{n+1}-3<0$ أي $u_{n+1}<3$.

إذن : العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$.

خلاصة : $u_n<3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.02 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- نبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

- لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}}$$
$$=\frac{\frac{3+u_n}{5-u_n}-1}{3-\frac{3+u_n}{5-u_n}}$$
$$=\frac{\frac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n}}{\frac{15-3u_n-3-u_n}{5-u_n}}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$= \frac{-2+2u_n}{12-4u_n}$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{-1+u_n}{3-u_n}$$

$$\left(v_n = \frac{u_n - 1}{3-u_n}\right) \qquad = \frac{1}{2} \times v_n \qquad \text{و منه : } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

خلاصة : المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

- نستنتج أن : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بما أن : المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ إذن حدها العام يكتب على الشكل التالي

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} \; ; \; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \; ; \; \left(v_0 = \frac{u_0 - 1}{3-u_0} = \frac{2-1}{3-2} = 1\right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

خلاصة : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- نبين أن : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{3-u_n} \Leftrightarrow 3v_n - v_n \times u_n = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow -v_n \times u_n - u_n = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \times (-1 - v_n) = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-3v_n}{-1-v_n} = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$$

خلاصة : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نكتب u_n بدلالة n

لدينا : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n} = \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

خلاصة : $u_n=\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (أو أيضا : $u_n=\dfrac{2^n+3}{2^n+1}$ غير ضرورية حسب السؤال الموالي)

ج- نحدد نهاية المتتالية (u_n)

- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$ حسب خاصية .
- و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1+0}{1+0}=1$.

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

.02

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2,1,3)$ و $B(3,1,1)$ و $C(2,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها ديكارتية : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

.01

أ- نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\1-1\\1-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-2\\2-1\\1-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

خلاصة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

ب- نستنتج أن : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

- لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;2;1)$ منظمية على المستوى (ABC)
- ومنه :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y+z-9=0$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

خلاصة : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

02...

أ- نبين أن : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها $r=6$.

لدينا :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+2y+1-1+z^2-34=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-34=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36=6^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $r=6$.

خلاصة : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها $r=6$.

د- نبين أن : $d(\Omega,(ABC))=3$.

- لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2\times1+2(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

خلاصة : $d(\Omega,(ABC))=3$

- نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

بما أن : $(r=6)$; $d(\Omega,(ABC))=3<6$ إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

خلاصة : المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

03.

أ- نحدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

- لدينا المتجهة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (ABC) و $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; (Δ) : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+2t\\z=t\end{cases}$

- خلاصة : تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; (Δ) : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+2t\\z=t\end{cases}$.

ب- نبين أن : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B

نعلم أن مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة (S) على المستوى (ABC) أي تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) و منه :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(ABC)\\M\in(\Delta)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+z-9=0\\\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+2t\\z=t\end{cases}\end{cases}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+2t)+2(-1+2t)+t-9=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t-9=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ \begin{cases} x=1+2\times 1=3 \\ y=-1+2\times 1=1 \\ z=1 \end{cases} \end{cases}$$

ومنه : تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) هي النقطة $B(3,1,1)$

خلاصة : مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $B(3,1,1)$.

.03

.01 نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+29=0$.

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 29=16-116=-100=i^2\times 10^2=(10i)^2$
- حلي المعادلة هما : $z_1=\dfrac{4+10i}{2}=2+5i$ و $z_2=\overline{z}_1=2-5i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{2+5i;2-5i\}$

.01 نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط Ω و A و B التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c و ω حيث : $\omega=2+5i$ و $a=5+2i$ و $b=5+8i$.

أ- ليكن u العدد الحقيقي حيث : $u=b-\omega$.

- نتحقق أن : $u=3+3i$.

لدينا : $u=b-\omega=5+8i-(2+5i)=5+8i-2-5i=3+3i$.

خلاصة : $u=3+3i$

- نبين أن : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

لدينا : $u=3+3i=3(1+i)=[3;0]\times\left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ و منه : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

خلاصة : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ب- نحدد عمدة العدد العقدي $\bar{u}$.

لدينا :

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$\arg(\bar{u}) \equiv -\arg(u)\ [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(u)\ [2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

خلاصة : $\arg(\bar{u}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ج- نتحقق أن : $a-\omega = \bar{u}$

- لدينا : $a-\omega = a = 5+2i-(2+5i) = 5+2i-2-5i = 3-3i = \bar{u}$.

خلاصة : $a-\omega = \bar{u}$.

- نستنتج أن : $\Omega A = \Omega B$ و $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

- لدينا :

$$|u| = |\bar{u}| \Leftrightarrow |b-\omega| = |a-\omega|$$
$$\Leftrightarrow \Omega B = \Omega A$$

و منه : $\Omega A = \Omega B$.

- لدينا :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \arg(u) - \arg(\bar{u})\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

خلاصة : $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

د- لنعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نحدد صورة النقطة A بالدوران R .

طريقة 1 :

لدينا :

- نعلم أن : $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

و هذا يمثل أن B صورة A بالدوران الذي مركزه Ω و قياس $\frac{\pi}{2}$ هو .

أي $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b=5+8i$.

طريقة 2 : (غير مرغوب فيها حسب أجوبة الأسئلة السابقة)

لدينا الشكل العقدي هو : $z'-\omega=(z-\omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :

و منه :

$$z'-(2+5i)=(z-(2+5i))e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z'=2+5i+(z-2-5i)i \quad ; \quad \left(e^{i\frac{\pi}{2}}=i\right)$$

$$z'=iz+2+5i-2i+5$$

$$z'=iz+7+3i$$

خلاصة : الكتابة العقدية للدوران r $z'=iz+7+3i$

و منه :

$$r(A)=A' \Leftrightarrow a'=i(5+2i)+7+3i$$

$$\Leftrightarrow a'=8i+5=b$$

خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b=5+8i$.

04.

يحتوي صندوق: على 10 كرات أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء (لا يمكن التميز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا و في آن واحد كراتين من الصندوق

01. ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان"

نبين أن : $p(A)=\frac{2}{15}$.

- عدد السحبات الممكنة : سحب كرتين في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تأليفة ل 2 من بين 10 .

و منه : $card\Omega=C_{10}^2=\frac{10\times9}{1\times2}=45$.

- نحسب cardA

الكرتان المسحوبتان حمراوان من بين 4 يمثل تأليفة ل 2 من بين 4 و منه : $cardA=C_4^2=\frac{4\times3}{1\times2}=6$.

ومنه : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

خلاصة : $p(A)=\frac{2}{15}$

02. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

أ- نبين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$.

- عندما نسحب كرتين من اللون الأحمر يبقى في الصندوق كرتين من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 2 .
- عندما نسحب كرتين من اللون الأخضر يبقى في الصندوق أربع كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 4 .
- عندما نسحب كرة من اللون الأحمر و الأخرى من اللون الأخضر يبقى في الصندوق ثلاث كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 3

خلاصة : مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $X(\Omega)=\{2,3,4\}$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب- نبين أن : $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

- الحدث $(X=3)$ يمثل الحدث " سحب كرتين من لونين مختلفين "

و منه : سحب كرة حمراء من بين 4 إذن $C_4^1=4$ و كرة خضراء من بين 6 إذن $C_6^1=6$ ومنه $card(X=3)=C_4^1\times C_6^1=24$

و بالتالي : $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8\times 3}{15\times 3}=\frac{8}{15}$.

خلاصة : $p(X=3)=\frac{8}{15}$

- نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

نلخص ذلك بالجدول التالي :

	من اللون الأخضر	احدهما حمراء و الأخرى خضراء	من اللون الأحمر	سحب لكرتين
المجموع	4	3	2	x_i
1	$p(X=4)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$	$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$	$p(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$	$p(X=x_i)$

.05

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O.;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

.I

.01 ...

أ- نبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=-\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب- نبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و منه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}=0$$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=0$

خلاصة : المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

.02 ...

أ- نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2+e^{2x}-4e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}+\dfrac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4=+\infty$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

- نؤول النتيجة هندسيا :

(C_f) منحنى الدالة f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

.03

أ- نبين أن : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع عدة دوال قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'(x)=\left(2x-2+e^{2x}-4e^{x}\right)'=2+2e^{2x}-4e^{x}=2\left(1+\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}\right)=2\left(\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}+1\right)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$.

خلاصة : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نضع جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '		+	0	+	
f		↗	0	↗	$+\infty$
	$-\infty$				

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ حيث $f(\alpha)=0$.

- نثبت أن : f تقابل من $]1,\ln 4[$ إلى $f(]1,\ln 4[)$

الدالة f متصلة لأنها قابلة للاشتقاق (أو أيضا مجموع عدة دوال متصلة) على $]1,\ln 4[$

f تزايدية قطعا على $]1,\ln 4[$ (إذن f تقابل من $]1,\ln 4[$ إلى $f(]1,\ln 4[)=]e^{2}-4e;4\ln 2-2[$)

- لدينا ($2\ln 2-1=\ln 4-\ln e>0$; $4>e$) $f(1)\times f(\ln 4)=\left(e^{2}-4e\right)(4\ln 2-2)=\underbrace{e(e-4)}_{<0}\,2\times\underbrace{(2\ln 2-1)}_{>0}<0$

13:01 2016-06-24

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- ومنه : $0 \in f\left(]1,\ln 4[\right) =]e^2-4e;4\ln 2-2[$
- إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ حيث $f(\alpha)=0$. (أو أيضا حسب الدالة f تقابل)

خلاصة : يوجد عدد وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ حيث $f(\alpha)=0$.

04. ..

أ- نبين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4;+\infty[$ وتحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty;\ln 4[$.

لهذا ندرس إشارة $f(x)-(2x-2)$.

لدينا :

$$f(x)-(2x-2) = \cancel{2x}-\cancel{2}+e^{2x}-4e^x-\cancel{2x}+\cancel{2} = e^x\left(e^x-4\right)$$

إشارة الفرق هي إشارة e^x-4 لأن $e^x>0$

ندرس إشارة e^x-4

ومنه :

$$e^x-4>0 \Leftrightarrow e^x>4$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)>\ln 4$$
$$\Leftrightarrow x>\ln 4$$

وضع $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم بواسط الجدول التالي :

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-(2x-2)$		$-$ 0 $+$	
الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (D)	(D) تحت (C_f)	(D) يقطع (C_f)	(D) فوق (C_f)

ب- نبين أن : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0.-5)$.

- نحسب الدالة المشتقة الثانية لتحديد نقط انعطاف f .

لدينا : $f'(x)=2\left(e^x-1\right)^2$ و منه : $f''(x)=\left[2\left(e^x-1\right)^2\right]'=2\times 2\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)=4e^x\left(e^x-1\right)$

- إشارة f'' هي إشارة e^x-1

و منه :

$$e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)\geq \ln 1$$
$$\Leftrightarrow x\geq 0$$

إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

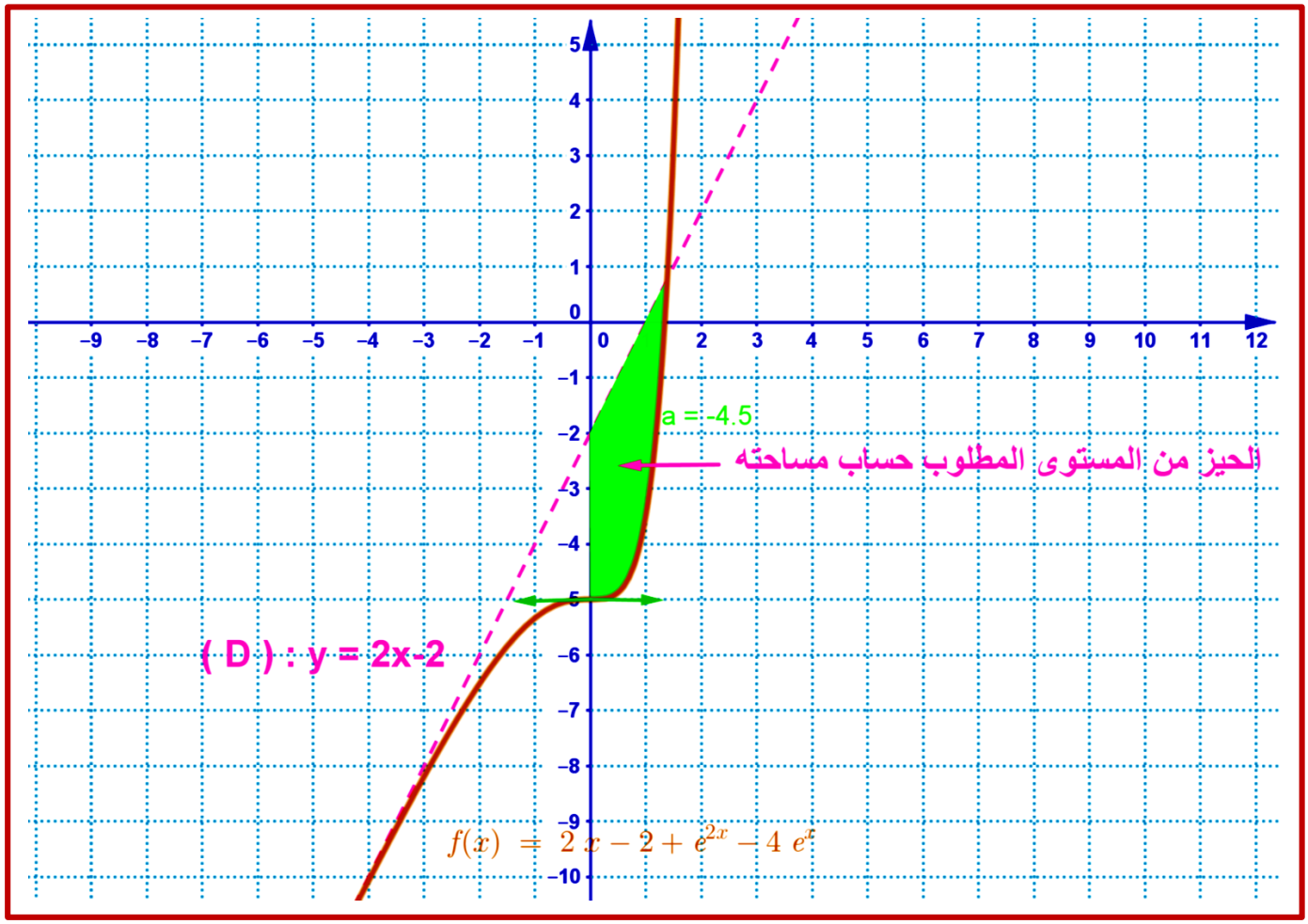
للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومنه : الدالة المشتقة الثانية تنعدم في $x_0 = 0$ و تتغير إشارتها بجوار $x_0 = 0$ إذن النقطة التي أفصولها $x_0 = 0$ هي نقطة انعطاف و حيدة و لدينا $f(0) = 2\times 0 - 2 + e^{2\times 0} - 4e^0 = -2 + 1 - 4 = -5$

خلاصة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0.-5)$.

ج- ننشئ المستقيم (D) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نفس المعلم $(O.;\vec{i};\vec{j})$ (نأخذ $\ln 4 \approx 1,4$ و $\alpha \approx 1,3$).



..05

أ- نبين أن : $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x} - 4e^x\right)dx = -\frac{9}{2}$

لدينا :

$$\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x} - 4e^x\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x\right]_0^{\ln 4} = \frac{1}{2}e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4} - \left(\frac{1}{2}e^{2\times 0} - 4e^0\right) = \frac{1}{2}\times e^{\ln 16} - 4\times 4 - \left(\frac{1}{2}\times 1 - 4\times 1\right) = -\frac{9}{2}$$

خلاصة : $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x} - 4e^x\right)dx = -\frac{9}{2}$

ب- نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x = \ln 4$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

المساحة المطلوبة هي :

$$\int_0^{\ln 4}\left((2x-2)-f(x)\right)dx=\int_0^{\ln 4}-\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\left(\frac{-9}{2}\right)=\frac{9}{2}cm^2 .$$

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$ هي $\frac{9}{2}cm^2$

II. ...

01. ...

أ- نحل المعادلة التفاضلية : $y''-3y'+2y=0$

هي معادلة على شكل $y''+ay'+by=0$ ومنه المعادلة المميزة هي : $r^2-3r+2=0$

نحل المعادلة المميزة :

لدينا :

$$r^2-3r+2=0 \Leftrightarrow r^2-r-2r+2=0$$
$$\Leftrightarrow r(r-1)-2(r-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (r-1)(r-2)=0$$
$$\Leftrightarrow r=1 \text{ أو } r=2$$

و منه المعادلة المميزة لها حلين حقيقين $r_1=1$ و $r_2=2$

و بالتالي : الحل العام المعادلة التفاضلية هي الدوال التي على شكل : $y=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

ب- نحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.

- لدينا : $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$ نحدد α و β حيث : $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.
- لدينا : $g'(x)=\left(\alpha e^{x}+\beta e^{2x}\right)'=\alpha e^{x}+2\beta e^{2x}$ ومنه $g'(0)=-2 \Leftrightarrow \alpha\times 1+2\beta\times 1=-2$
- و $g(0)=-3 \Leftrightarrow \alpha\times 1+\beta\times 1=-2$
- نحصل على النظمة : $\begin{cases}\alpha+2\beta=-2\\ \alpha+\beta=-3\end{cases}$ و منه : $\beta=1$ و $\alpha=-4$

خلاصة : الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$ هي $g(x)=e^{2x}-4e^{x}$.

02. لتكن h الدالة العددية المعرفة على $]\ln 4;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$.

أ- نبين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و أن h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن : $h(x)=\ln\left(g(x)\right)$ و $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=g(x)$

- اتصال h على $]\ln 4;+\infty[$:

▪ لدينا الدالة : $x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$: g متصلة (لأنها قابلة للاشتقاق مرتين و ذلك حل خاص للمعادلة التفاضلية من الدرجة 2) و موجبة قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ (لأن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4;+\infty[$ ومنه $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=g(x)>0$)

▪ الدالة : $x\mapsto \ln x$ متصلة على $]0;+\infty[$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- و منه : الدالة $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$ متصلة على $]\ln 4;+\infty[$ لأنها مركبة دالتين متصلتين .
  - الرتابة قطعا على $]\ln 4;+\infty[$:
- لدينا الدالة : $x\mapsto \ln x$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$
- لدينا الدالة : $x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$ قابلة للاشتقاق على $]\ln 4;+\infty[$ مع دالتها المشتقة هي $x\mapsto 2e^{2x}-4e^{x}=2e^{x}\left(e^{x}-2\right)$ إشارتها هي إشارة $e^{x}-2$ و منه : $e^{x}-2>0\Leftrightarrow x>\ln 2$ إذن الدالة $x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$ هي تزايدية قطعا على $]\ln 2;+\infty[$ و منه هي تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ (لأن $]\ln 4;+\infty[\subset]\ln 2;+\infty[$).
- الدالة h هي تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ لأنها مركبة دالتين تزايديتين قطعا .
- و بالتالي الدالة h هي متصلة و تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J=h\left(]\ln 4;+\infty[\right)$ إلى $]\ln 4;+\infty[$.

خلاصة : h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J=h\left(]\ln 4;+\infty[\right)$ إلى $]\ln 4;+\infty[$.

- نحدد J

لدينا :

$\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} h(x)=\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} \ln\left(f(x)-(2x-2)\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} f(x)-(2x-2)=0^{+}$ ((C_f) فوق (D) على $]\ln 4;+\infty[$) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$.

ومنه : $h\left(]\ln 4;+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} h(x);\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[=\mathbb{R}$

خلاصة : الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- نتحقق أن : $h(\ln 5)=\ln 5$ ثم نحدد $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$.

- لدينا : $h(\ln 5)=\ln\left(e^{2\ln 5}-4e^{\ln 5}\right)=\ln\left(e^{\ln 25}-4\times 5\right)=\ln(25-20)=\ln 5$

خلاصة : $h(\ln 5)=\ln 5$

- نحدد $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$.

لدينا :

- h قابلة للاشتقاق على $]\ln 4;+\infty[$ (مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق) و منه h قابلة للاشتقاق في $\ln 5$ (لأن $\ln 5\in]\ln 4;+\infty[$)
- نبين أن : $h'(\ln 5)\neq 0$ (أي h' لا تنعدم في $\ln 5$)

لدينا : $h'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)\right)'=\dfrac{\left(e^{2x}-4e^{x}\right)'}{e^{2x}-4e^{x}}=\dfrac{2e^{2x}-4e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}}=\dfrac{2e^{x}\left(e^{x}-2\right)}{e^{x}\left(e^{x}-4\right)}=\dfrac{2\left(e^{x}-2\right)}{e^{x}-4}$

ومنه : $h'(\ln 5)=\dfrac{2\left(e^{\ln 5}-2\right)}{e^{\ln 5}-4}=\dfrac{2(5-2)}{5-4}=6$ و بالتالي $h'(\ln 5)\neq 0$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- إذن الدالة العكسية h^{-1} قابلة للاشتقاق في $h(\ln 5)$ مع $\left(h^{-1}\right)'\left(h(x_0)\right)=\dfrac{1}{h'(x_0)}$ نأخذ : $x_0=\ln 5$

و منه : $\left(h^{-1}\right)'\left(h(\ln 5)\right)=\dfrac{1}{h'(\ln 5)}=\dfrac{1}{6}$ خلاصة : $\boxed{\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)=\dfrac{1}{6}}$

انـــــتـــــهـــــى

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma